

Моделирование захоронения углекислого газа в вязкоупругой пористой среде

Р. А. Вирц*, А. А. Папин

Алтайский государственный университет, 656049, Барнаул, Россия

*Контактный автор: Вирц Рудольф Александрович, e-mail: virtsrudolf@gmail.com

Поступила 03 мая 2022 г., принята в печать 16 июня 2022 г.

Предложена математическая модель фильтрации газа в среде с переменной пористостью. В двумерном случае определяющая система уравнений в предположении малости скорости твердой фазы сведена к параболическому уравнению для эффективного давления среды и уравнению первого порядка для пористости. Проведено численное исследование полученной начально-краевой задачи. Исследовано несколько вариантов параметров нагнетания углекислого газа в пласт с малой начальной пористостью. В ходе численных расчетов определены оптимальные варианты нагнетания газа для его хранения в геологической среде в долгосрочной перспективе.

Ключевые слова: пористость, фильтрация, пороупругость, углекислый газ, закачка, численное решение.

Цитирование: Вирц Р.А., Папин А.А. Моделирование захоронения углекислого газа в вязкоупругой пористой среде. Вычислительные технологии. 2022; 27(6):4–18. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.002.

Введение

Актуальной задачей фильтрации является проблема захвата и долгосрочного захоронения углекислого газа в геологических формациях. При эксплуатации большого количества промышленных объектов и транспортных средств выделяется большое количество диоксида углерода, что в конечном счете неблагоприятно воздействует на окружающую среду и климат. Существуют различные подходы при моделировании хранения углекислого газа в недрах земли. В работах [1, 2] рассмотрен процесс закачки углекислого газа в солевой водоносный горизонт. Происходящие процессы в дальнейшем способствуют безопасному и долгосрочному хранению CO_2 . Работа [3] посвящена исследованию конвективного растворения CO_2 при низком давлении (менее 1 МПа) в закрытой системе, где давление в газе снижается по мере продолжения конвекции. В [4] численно смоделирована закачка углекислого газа в карбонатный коллектор. Исследовано влияние геохимических реакций, вызванных закачкой CO_2 , на гидравлические и геомеханические свойства водонасыщенного известняка. Обнаружено, что пористость известняка уменьшается после обработки CO_2 , что приводит к снижению проницаемости в два раза. В работе [5] рассмотрена математическая модель процесса нагнетания углекислого газа в пласт, заполненный в исходном состоянии метаном и его гидратом. На основе методов механики многофазных систем приведена система уравнений, описывающая для данного случая процессы тепло- и массопереноса в пористой среде.

В работе [6] представлена математическая модель для описания переноса наночастиц углекислым газом, закачиваемым в пористую среду. Идея заключается в добавлении наночастиц к закачиваемому газу для увеличения контраста плотности между насыщенным CO_2 раствором и находящимся ниже резидентным раствором и, как следствие, уменьшения времени возникновения неустойчивости и усиления конвективного перемешивания. В работе [7] рассмотрена задача закачки углекислого газа в водонасыщенный проницаемый пласт. Методами прямого численного моделирования определена граница области, занимаемой CO_2 в пласте, при различных параметрах нагнетания. Проведено сравнение результатов расчетов осесимметрической модели с приближенным автомодельным решением задачи. Все эти работы опираются на классические модели Маскета – Леверетта, пористость считается заданной функцией, как правило, постоянной. Более подробный обзор представлен в [8].

1. Постановка задачи

Рассматриваемая в работе математическая модель фильтрации газа в пороупругой среде, состоящая из законов сохранения масс для каждой из фаз, закона Дарси, реологического соотношения для пористой среды и уравнения баланса сил, имеет вид [9, 10]

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}_f \rho_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_s (1 - \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \mathbf{v}_s \rho_s) = 0, \quad (1)$$

$$\phi (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = -\frac{K(\phi)}{\mu} (\nabla p_f - \rho_f \mathbf{g}), \quad p_f = p_{tot} - p_e, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla p_e \right), \quad (3)$$

$$\rho_{tot} \mathbf{g} + \text{div} \left((1 - \phi) \eta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \right) \right) - \nabla p_{tot} = 0. \quad (4)$$

Здесь ρ_f , ρ_s , \mathbf{v}_f , \mathbf{v}_s — соответственно истинные плотности и скорости газовой и твердой фаз; ϕ — пористость; p_f , p_s — соответственно давление газовой и твердой фазы; $p_e = p_{tot} - p_f$ — эффективное давление; $p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s$ — общее давление; $\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s$ — плотность двухфазной среды; $\mathbf{g} = (0, -g)$ — вектор силы тяжести; $K(\phi) = k' \phi^n$ — коэффициент проницаемости; k' — проницаемость пористой среды; μ — динамическая вязкость газа; $a_1(\phi)$ — коэффициент объемной вязкости; $a_2(\phi)$ — коэффициент объемной сжимаемости. В дальнейшем используется обозначение $k(\phi) = K(\phi)/\mu$. Плотности газовой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, y, t) \in Q_T$.

Особенностью рассматриваемой в данной работе модели является переменный характер пористости. Близкие по структуре системы уравнений представлены в работах [6, 11–21]. В работе [15] выполнено численное решение неизотермической фильтрации вязкой несжимаемой жидкости. В [16] для системы уравнений одномерного нестационарного движения жидкости в теплопроводной вязкой пористой среде доказана разрешимость начально-краевой задачи. Работа [17] посвящена численному исследованию одномерной изотермической задачи фильтрации жидкости.

Преобразуем систему (1)–(4). Второе уравнение в (1) и закон Дарси (2) перепишем в следующей форме:

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{d\phi}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}_s, \quad (5)$$

$$\phi(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \mathbf{g}) \equiv \mathbf{U}, \quad (6)$$

где $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + \mathbf{v}_s \operatorname{div}(\cdot)$. Учитывая (6), первое уравнение (1) представим как

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho_f (\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_s)) = \frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v}_s \nabla \cdot (\phi \rho_f) + \phi \rho_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_s) + \rho_f \nabla \cdot (\mathbf{U}) + \mathbf{U} \nabla \cdot (\rho_f) = 0$$

и, используя определение материальной производной и зависимость (5), последнее уравнение преобразуем к виду

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\phi}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{\mathbf{U}}{\rho_f} \nabla \cdot \rho_f = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем предполагаем, что скорость движения твердой фазы пренебрежимо мала. В этом случае конвективным слагаемым можно пренебречь ($d(\cdot)/dt \sim \partial(\cdot)/\partial t$) [9]. Тогда уравнения (5), (7) перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\phi}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{U} - \frac{\mathbf{U}}{\rho_f} \nabla \cdot \rho_f, \quad (8)$$

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v}_s. \quad (9)$$

В частном случае, когда плотность газовой фазы постоянна, уравнение (8) примет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s = -\nabla \cdot \mathbf{U}. \quad (10)$$

Вязкость газа много меньше сдвиговой вязкости скелета, поэтому в приложениях в уравнении баланса сил (4) дивергенцией тензора напряжения в газовой фазе пренебрегают [10]. Принимая во внимание представление (2) для p_f и (4) с учетом вышесказанного допущения, уравнения (9) и (10) для нахождения эффективного давления и пористости преобразуем к системе

$$\nabla \cdot (k(\phi)(\nabla p_e - \rho_f \mathbf{g})) = a_1(\phi)p_e + a_2(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (12)$$

где $\rho = (1-\phi)\Delta\rho$, $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$. Сформулируем начально-краевую задачу для уравнений (11), (12). Фильтрация газа происходит в конечной области Ω переменных (x, y) , граница $\Gamma = \partial\Omega$ которой состоит из проницаемой области для газа Γ_1 , соответствующей нагнетательной скважине, непроницаемых границ $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$ и поверхности Γ_4 . Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_i = \Gamma_i \times (0, T)$, $i = 1, \dots, 6$. На глубине H метров происходит закачка углекислого газа со скоростью $v(t)$, $v(t) \geq 0$. Ширина области равна L метров (рис. 1).

Условия непротекания для твердой фазы и притока газа на Γ_1 имеют вид

$$(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = -v(t), \quad v|_{t=0} = 0, \quad (x, y, t) \in S_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \quad (13)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к Γ_i .

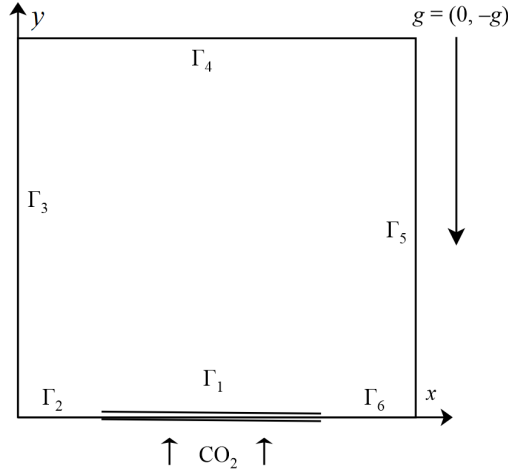


Рис. 1. Область фильтрации

Fig. 1. Filtration area

На участках Γ_i , $i = 2, 3, 5, 6$, условия непротекания для твердой фазы и газа имеют вид

$$(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (x, y, t) \in S_i. \quad (14)$$

На границе Γ_4 задаются давления твердой фазы и газа (p_s и p_f), совпадающие с лито- и гидростатическим [10] соответственно,

$$p_f = p_a + \rho_f g(H - y), \quad p_s = p_a + \rho_s g(H - y), \quad (x, y, t) \in S_4, \quad (15)$$

где p_a — атмосферное давление.

Помимо граничных условий необходимо задать также начальное распределение эффективного давления и пористости

$$p_e(x, y, 0) = p_e^0(x, y), \quad \phi(x, y, 0) = \phi^0(x, y).$$

Перепишем граничные условия применительно к функции p_e . С использованием закона Дарси (2) и представления для p_e краевые условия (13)–(15) преобразуем к виду

$$\frac{k(\phi)}{\phi} (\nabla p_e - \rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = v(t), \quad (x, y, t) \in S_1, \quad (16)$$

$$(\nabla p_e - \rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x, y, t) \in S_i, \quad i = 2, 3, 5, 6, \quad (17)$$

$$p_e = 0, \quad (x, y, t) \in S_4. \quad (18)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$x' = x/L, \quad y' = y/H, \quad t' = t/T, \quad p'_e = p_e/P, \quad v' = v/V.$$

Область изменения x' , y' , t' есть квадрат со стороной, равной единице. Коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости, как правило, определяются эмпирически. В частности, они имеют вид $a_1(\phi) = \phi^m/\eta$, $a_2(\phi) = \phi^l\beta_\phi$, где η — вязкость твердой фазы, β_ϕ — коэффициент сжимаемости пор, $l = 1/2$, $m = 2$, $n = 3$ [9]. Тогда систему уравнений (11), (12) с краевыми условиями (16)–(18) (штрихи опущены) запишем как

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi^n \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi^n \left(\frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) \right) \right) = \lambda \phi^m p_e + \omega \phi^l \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{1 - \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\lambda \phi^m p_e - \omega \phi^l \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\phi^{n-1} \left(\frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) \right) = v(t), \quad (x, y, t) \in S_1, \quad (21)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial x} = 0, \quad (x, y, t) \in \{S_3, S_5\}, \quad \frac{\partial p_e}{\partial y} + (1 - \phi) = 0, \quad (x, y, t) \in \{S_2, S_6\}, \quad (22)$$

$$p_e = 0, \quad (x, y, t) \in S_4. \quad (23)$$

Масштабы давления и скорости принимаются равными $P = \Delta \rho g H$ и $V = \Delta \rho g k' / \mu$ соответственно. Другие безразмерные параметры имеют вид $\alpha = k' P T / (\mu L^2)$, $\varepsilon = k' P T / (\mu H^2)$, $\lambda = T P / \eta$, $\omega = P \beta \phi$.

2. Численный расчет

Начально-краевая задача (19)–(23) решается численно. В области $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ построим равномерную сетку $\bar{\omega}_{h_x h_y \tau} = \bar{\omega}_{h_x} \times \bar{\omega}_{h_y} \times \bar{\omega}_\tau$: $\bar{\omega}_{h_x} = \{x_i = i h_x, i = 0, 1, \dots, N_x, N_x h_x = 1\}$, $\bar{\omega}_{h_y} = \{y_j = j h_y, j = 0, 1, \dots, N_y, N_y h_y = 1\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k \tau, k = 0, 1, \dots, M, M \tau = 1\}$. Здесь h_x, h_y — шаги по пространственным координатам, τ — шаг по времени. Численные решения в узлах сетки (x_i, y_j, t_k) обозначаются через $\varphi_{i,j}^k = \phi(x_i, y_j, t_k)$, $p_{i,j}^k = p_e(x_i, y_j, t_k)$.

Для численной реализации уравнения (19) используется схема переменных направлений [22]

$$a_{i,j}^k \frac{p_{i,j}^{k+1/2} - p_{i,j}^k}{0.5\tau} = \wedge_{xx} p_{i,j}^{k+1/2} + \wedge_{yy} p_{i,j}^k + f_{i,j}^k, \quad (24)$$

$$a_{i,j}^k \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^{k+1/2}}{0.5\tau} = \wedge_{xx} p_{i,j}^{k+1/2} + \wedge_{yy} p_{i,j}^{k+1} + f_{i,j}^k, \quad (25)$$

где

$$\wedge_{xx} p_{i,j}^{k+1/2} = \frac{1}{h_x} \left(b_{i+1/2,j}^k \frac{p_{i+1,j}^{k+1/2} - p_{i,j}^{k+1/2}}{h_x} - b_{i-1/2,j}^k \frac{p_{i,j}^{k+1/2} - p_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_x} \right),$$

$$\wedge_{yy} p_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{h_y} \left(c_{i,j+1/2}^k \frac{p_{i,j+1}^{k+1} - p_{i,j}^{k+1}}{h_y} - c_{i,j-1/2}^k \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j-1}^{k+1}}{h_y} \right),$$

$$a_{i,j}^k = \omega (\varphi_{i,j}^k)^l, \quad b_{i,j}^k = \alpha (\varphi_{i,j}^k)^n, \quad c_{i,j}^k = \varepsilon (\varphi_{i,j}^k)^n,$$

$$d_{i,j}^k = \varepsilon (\varphi_{i,j}^k)^n (1 - \phi_{i,j}^k), \quad e_{i,j}^k = \lambda (\varphi_{i,j}^k)^m, \quad f_{i,j}^k = \frac{d_{i,j+1}^k - d_{i,j-1}^k}{2h_y} - e_{i,j}^k p_{i,j}^k,$$

$$b_{i+1/2,j}^k = \frac{2b_{i,j}^k b_{i+1,j}^k}{b_{i,j}^k + b_{i+1,j}^k}, \quad b_{i-1/2,j}^k = \frac{2b_{i,j}^k b_{i-1,j}^k}{b_{i,j}^k + b_{i-1,j}^k}, \quad c_{i,j+1/2}^k = \frac{2c_{i,j}^k c_{i,j+1}^k}{c_{i,j}^k + c_{i,j+1}^k}, \quad c_{i,j-1/2}^k = \frac{2c_{i,j}^k c_{i,j-1}^k}{c_{i,j}^k + c_{i,j-1}^k}.$$

Условия (21)–(23) аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{i,0}^k)^{n-1} \left(\frac{p_{i,1}^{k+1} - p_{i,0}^{k+1}}{h_y} + (1 - \varphi_{i,0}^k) \right) &= v, \quad (x_i, y_j, t_k) \in S_1, \\
 \frac{p_{1,j}^{k+1/2} - p_{0,j}^{k+1/2}}{h_x} &= 0, \quad (x_i, y_j, t_k) \in S_3, \quad \frac{p_{N_x,j}^{k+1/2} - p_{N_x-1,j}^{k+1/2}}{h_x} = 0, \quad (x_i, y_j, t_k) \in S_5, \\
 \frac{p_{i,1}^{k+1} - p_{i,0}^{k+1}}{h_y} + (1 - \varphi_{i,0}^k) &= 0, \quad (x_i, y_j, t_k) \in \{S_2, S_6\}, \quad p_{i,N_y}^{k+1} = 0, \quad (x_i, y_j, t_k) \in S_4.
 \end{aligned}$$

Для уравнения (20) используем метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности [23]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k}{\tau} &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (26) \\
 k_1 &= (1 - \varphi_{i,j}^k) \left(-\lambda(\varphi_{i,j}^k)^m p_{i,j}^k - \omega(\varphi_{i,j}^k)^l \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k}{\tau} \right) \equiv F(\varphi_{i,j}^k, p_{i,j}^k), \\
 k_2 &= F\left(\varphi_{i,j}^k + \frac{\tau k_1}{2}, p_{i,j}^k\right), \quad k_3 = F\left(\varphi_{i,j}^k + \frac{\tau k_2}{2}, p_{i,j}^k\right), \quad k_4 = F(\varphi_{i,j}^k + \tau k_3, p_{i,j}^k).
 \end{aligned}$$

Алгоритм счета следующий: на временном слое $k = 0$, используя начальные значения для пористости и эффективного давления $(p_{i,j}^0, \varphi_{i,j}^0)$, из (24) прогонкой вдоль строк (по x) находим $p_{i,j}^{k+1/2}$. Далее найденное $p_{i,j}^{k+1/2}$ используем в (25) и прогонкой вдоль столбцов (по y) находим $p_{i,j}^{k+1}$. Следующим шагом будет нахождение пористости $(\varphi_{i,j}^{k+1})$ из уравнения (26). На слое ($k > 0$) повторяем алгоритм для следующих шагов по времени (M раз).

Определим порядки равномерной сходимости для численного решения задачи (19)–(23) по пространственным и временной переменным. Дальнейшие рассуждения следуют из работы [24]. Зафиксируем скорость нагнетания газа, характерное время и глубину расположения источника закачки. Выберем $v' = 0.5$, $T = 1$ сут., $H = 50$ м.

Найдем порядок равномерной сходимости по пространственным переменным x и y . Вести наблюдения будем за пористостью. Фиксируя значения шага τ , определим следующие величины:

$$\begin{aligned}
 S_q &= \max_k \max_j \max_i |\varphi_{i,j}^{q+1}(t_k) - \varphi_{i,j}^q(t_k)|, \\
 i &= 0, 1, \dots, N2^q, \quad j = 0, 1, \dots, N2^q, \quad k = 0, \dots, M, \quad q = 0, 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

где $M = 1/\tau$, $N_x = N_y = N$, $N = 50$. Величина S_q есть максимум разности приближенных решений, полученных на двух последовательных вложенных пространственных сетках. Предполагаем, что для величин S_q справедлива оценка

$$S_q = M_1 \left(\frac{1}{N2^q} \right)^x + M_2 \tau^\beta, \quad (27)$$

где M_1 и M_2 — точные константы и их значения не зависят от q . Как вытекает из (27), для разности $W_q = S_q - S_{q+1}$ верна оценка

$$W_q = M_1 \left(\frac{1}{N2^q} \right)^x \left(\frac{1}{2^x} \right), \quad (28)$$

следовательно,

$$\frac{W_q}{W_{q+1}} = 2^x.$$

Из последнего соотношения определяем порядок скорости сходимости для соответствующего значения q (табл. 1):

$$\chi(q) = \log_2 \frac{W_q}{W_{q+1}}, \quad q = 0, 1, 2, 3.$$

Взяв из найденных $\chi(q)$ минимальное, получим оценку порядка скорости сходимости. Из соотношения (28) можно получить значение постоянной M_1 . Таким образом, проведенный численный эксперимент позволил определить значения постоянных χ и M_1 первого слагаемого в оценке приближенного решения

$$|\phi(x_i, y_j, t_k) - \varphi_{ij}^k| \leq M_1 N^{-\chi} + M_2 \tau^\beta.$$

Результаты расчетов показали, что $\chi \approx 1.18$, $M_1 \approx 2.81$.

Получим значения постоянных M_2 и β . Метод аналогичен методу определения χ и M_1 . Зафиксируем пространственную сетку и рассмотрим последовательность вложенных сеток с шагами $\tau, \tau/2, \tau/2^2, \dots$, где $\tau = 0.02$. Проведенные расчеты показали, что минимальное значение $\beta \approx 1.28$ (табл. 1). Значение постоянной $M_2 \approx 1.33$.

Таким образом, экспериментально восстановлены все постоянные, входящие в оценку (27) равномерной сходимости

$$|\phi(x_i, y_j, t_k) - \varphi_{ij}^k| \leq 2.81 N^{-1.18} + 1.33 \tau^{1.28}.$$

Для проверки реализации численного алгоритма были произведены расчеты уравнения (19) по явной схеме с соблюдением ограничения на шаг по времени и по схеме стабилизирующей поправки [25]. Численные эксперименты показали незначительную разницу в полученных значениях искомых величин.

Газ и пористая среда обладают следующими параметрами [7, 10, с. 563]: $\eta = 10^{18}$ Па·с, $\beta_\phi = 10^{-8}$ Па⁻¹, $k' = 10^{-13}$ м², $\mu = 1463 \cdot 10^{-8}$ Па·с, $g = 9.8$ м/с², $\rho_s = 2.6 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_f = 2$ кг/м³. Закачка СО₂ в пласт производится с постоянной скоростью v . Скорость закачки не может быть произвольной. Можно придерживаться рекомендаций из [26, с. 35]. Для определения максимальной скорости притока воспользуемся неравенством

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} \leq Q,$$

где Q — число, для которого задают значения в пределах от 3 до 10; d — диаметр частиц грунта; ν — кинематическая вязкость газа. Если принять $d = 20$ мм, $\nu = 8.4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, то $v \leq 0.00126$ м/с при $Q = 3$ и $v \leq 0.0042$ м/с при $Q = 10$.

Т а б л и ц а 1. Порядок равномерной сходимости по пространственной χ и временной β переменным

Table 1. Order of uniform convergence in space χ and time β variables

q	0	1	2	3
χ	1.18	1.37	1.3	1.35
β	3.46	1.48	1.28	1.41

3. Обзор результатов

Рассмотрим подробнее три варианта нагнетания углекислого газа (табл. 2). Закачка CO_2 в пласт производится с постоянной скоростью v через скважину диаметром 168 мм [27], находящуюся на глубине H метров. Скважина в данной модели для простоты располагается в центре нижней области. Длительность закачки $T = 7$ сут.

При параметрах нагнетания по варианту А и безразмерной скорости $v' = 0.5$ пористость среды на момент остановки закачки газа представлена на рис. 2, а. Наибольшему изменению пористости подверглась порода вблизи скважины. Максимальное ее значение составляет около 0.045, что на 80 % больше начального значения. По мере распространения газа в области и уменьшения его давления пористость среды начина-

Т а б л и ц а 2. Параметры нагнетания CO_2

Table 2. Injection parameters CO_2

Вариант нагнетания	$\phi^0(x, y)$	v'	$v, \text{ м/с}$	Глубина закачки $H, \text{ м}$
А	0.025	0.1, 0.2, ..., 0.5	$1.8073 \cdot 10^{-5}, \dots, 9.0364 \cdot 10^{-5}$	50
В	0.025	0.01, 0.02, ..., 0.3	$1.8073 \cdot 10^{-6}, \dots, 5.4218 \cdot 10^{-5}$	300
С	0.025	0.01, 0.02, ..., 0.1	$1.8073 \cdot 10^{-6}, \dots, 1.8073 \cdot 10^{-5}$	800

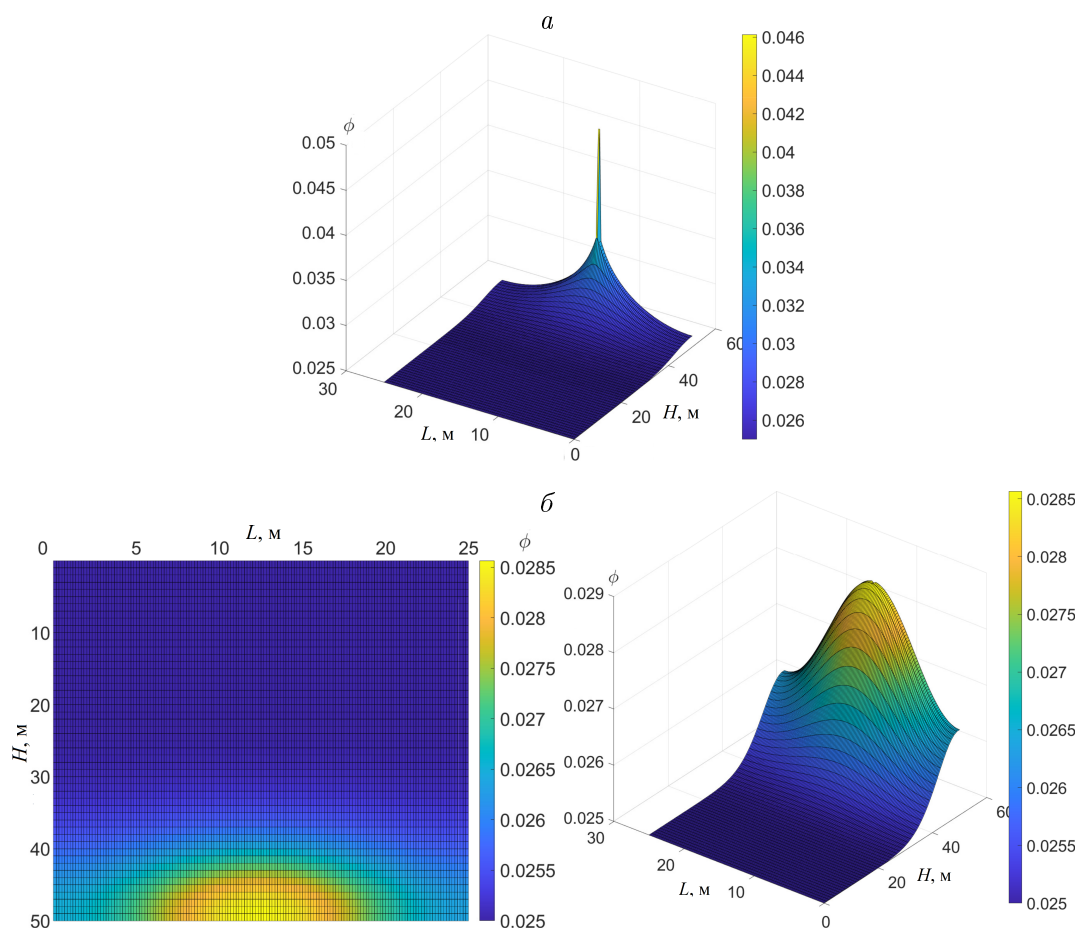


Рис. 2. Вариант А. Пористость среды на момент остановки закачки газа $T = 7$ сут. (а) и на момент времени $T = 8$ сут. (б), $v' = 0.5$

Fig. 2. Case A. Medium porosity at the time of stopping gas injection $T = 7$ days (a) and at the time $T = 8$ days (b), $v' = 0.5$

ет уменьшаться. Изменению пористости подвергается также вышележащий грунт. На следующие сутки от момента остановки нагнетания максимальная пористость среды у скважины составляет 0.028 (рис. 2, б).

Изменение пористости при различных безразмерных скоростях нагнетания представлено на рис. 3. Наблюдения ведутся за областью, находящейся по центру скважины, так как именно в этой зоне отмечено максимальное изменение пористости грунта. Можно наблюдать, что увеличение скорости нагнетания сопровождается ростом значения пористости в области скважины. Область повышенной пористости пласта достигает верхней границы при выборе характерного времени $T = 30$ сут. для всех пяти вариантов скоростей нагнетания (значение характерного времени здесь и в дальнейшем выбирается при условии, что на этом временном интервале есть изменение пористости). Можно сделать вывод о том, что закачанный газ за данное характерное время выйдет на поверхность.

Исследуем вариант нагнетания газа В. За характерное время, равное $T = 365$ сут., при скорости закачки $v' = 0.3$ изменению пористости подверглась порода у верхней границы (рис. 4). Следовательно, в данном случае закачанный газ достигает верхней границы расчетной области. Рассмотрим нагнетание углекислого газа в пласт с различными скоростями и укажем глубину области, меньше которой не наблюдаются изменения пористости грунта. В ходе численных расчетов определено, что при выборе значения безразмерной скорости от 0.01 до 0.28 изменению пористости подвергается грунт на глубине 144 м (рис. 5), а при скорости $v' = 0.29$ — на глубине 96 м. В вышележащих слоях среды пористость равна начальному значению, т.е. закачанный газ не достигает поверхности.

Для варианта С при $v' = 0.1$, $T = 365$ сут. пористость среды на момент остановки нагнетания газа представлена на рис. 6. Максимальная пористость среды у скважины составляет около 0.032. Выбор большего характерного времени не оказывал существенного влияния на изменение пористости. Из численных расчетов выявлено, что выбор безразмерной скорости v' от 0.01 до 0.1 не сопровождается выходом углекислого газа на поверхность, поскольку на глубине 608 м процесс фильтрации газа останавливается и изменения пористости нет (рис. 7).

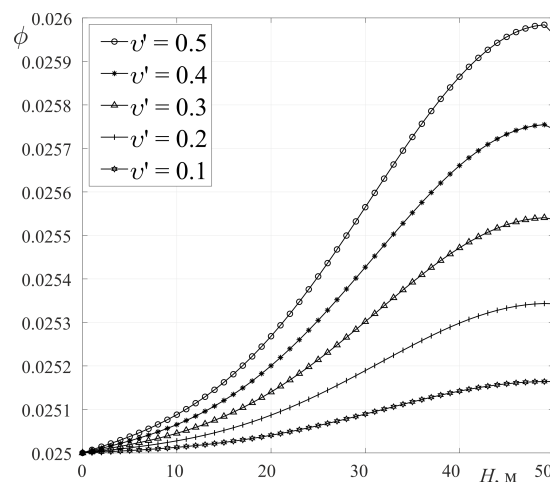


Рис. 3. Вариант А. Зависимость изменения пористости от глубины при различных безразмерных скоростях нагнетания v' , $L = 12.5$ м, $T = 30$ сут.

Fig. 3. Case A. Dependence of porosity change versus depth at various dimensionless injection rates v' , $L = 12.5$ m, $T = 30$ days

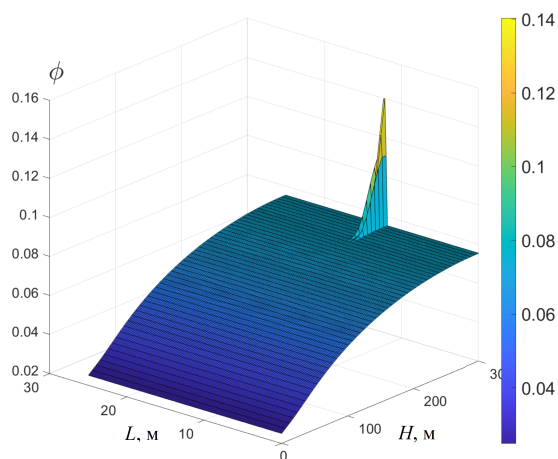


Рис. 4. Вариант В. Пористость среды на момент времени $T = 365$ сут., $v' = 0.3$
 Fig. 4. Case B. Medium porosity at $T = 365$ days, $v' = 0.3$

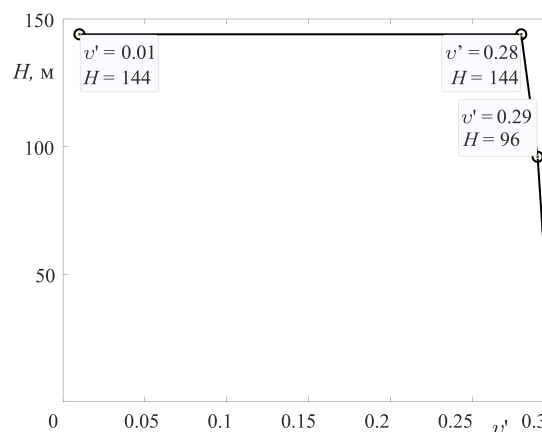


Рис. 5. Вариант В. Зависимость глубины установления пористости от скорости нагнетания
 Fig. 5. Case B. Dependence of the depth of porosity establishment on the injection rate

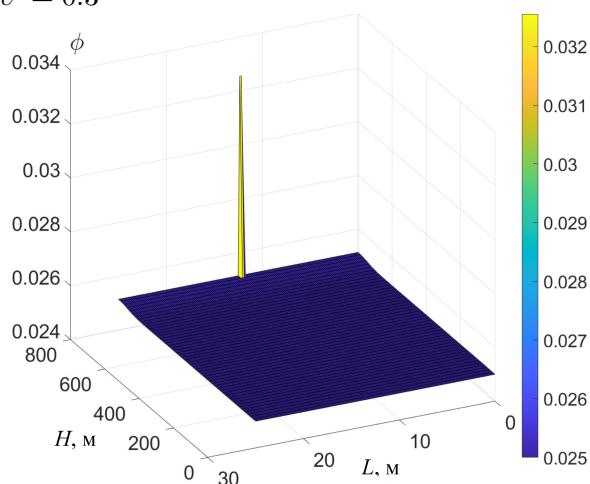


Рис. 6. Вариант С. Пористость среды на момент времени $T = 365$ сут., $v' = 0.1$
 Fig. 6. Case C. Medium porosity at $T = 365$ days, $v' = 0.1$

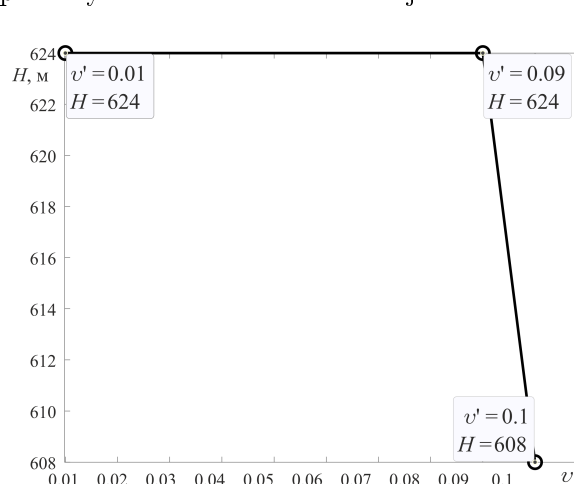


Рис. 7. Вариант С. Зависимость глубины установления пористости от скорости нагнетания
 Fig. 7. Case C. Dependence of the depth of porosity establishment on the injection rate

Расчеты проводились при различных значениях начальной пористости для трех вариантов нагнетания. Определено, что при начальной пористости $\phi^0(x, y) = 0.025$ и меньше результаты качественно не отличаются от полученных ранее. Выбор большего начального значения при больших характерных временах сопровождается изменением пористости у верхней границы расчетной области, т.е. выходом закачанного газа на поверхность. Из расчетов также обнаружено, что на глубинах расположения источника закачки 50, 300 и 800 м максимальная безразмерная скорость не могла превышать 0.5, 0.3 и 0.1 соответственно. То есть с ростом глубины максимальная скорость притока уменьшалась. По-видимому, данный факт связан с ограничением применимости закона Дарси в условиях высокого пластового давления и необходимостью учета сжимаемости газовой фазы в дальнейшем.

Таким образом, дана постановка задачи о захоронении углекислого газа в среде с переменной пористостью. Выполнено численное исследование задачи закачки углекислого газа в вязкоупругую породу. Экспериментально определены порядки равномерной

сходимости по пространственным и временной переменным. Численные расчеты производились для случаев с различными скоростями нагнетания газа и на различных глубинах расположения источника закачки. В ходе численных экспериментов определены оптимальная скорость закачки и глубина, при которой газ не достигнет поверхности.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме “Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики” (тема № FZMW-2020-0008).

Список литературы

- [1] **Wen B., Shi Z., Jessen K., Hesse M.A., Tsotsis T.T.** Convective carbon dioxide dissolution in a closed porous medium at high-pressure real-gas conditions. *Advances in Water Resources*. 2021; 2021(154):103950. DOI:10.1016/j.advwatres.2021.103950. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0309170821001056>.
- [2] **Singh R.P., Shekhawat K.S., Das M.K., Muralidhar K.** Geological sequestration of CO₂ in a water-bearing reservoir in hydrate-forming conditions. *Oil & Gas Science and Technology — Revue d'IFP Energies Nouvelles*. 2020; 75(5):51. DOI:10.2516/ogst/2020038. Available at: https://www.researchgate.net/publication/343233780_Geological_sequestration_of_CO_2_in_a_water-bearing_reservoir_in_hydrate-forming_conditions.
- [3] **Wen B., Akhbari D., Zhang L., Hesse M.A.** Convective carbon dioxide dissolution in a closed porous medium at low pressure. *Journal of Fluid Mechanics*. 2018; (854):56–87. DOI:10.1017/jfm.2018.622. Available at: https://www.researchgate.net/publication/327352691_Convective_carbon_dioxide_dissolution_in_a_closed_porous_medium_at_low_pressure.
- [4] **Kim K., Vilarrasa V., Makhnenko R.Y.** CO₂ injection effect on geomechanical and flow properties of calcite-rich reservoirs. *Fluids*. 2018; 3(3):66. DOI:10.3390/fluids3030066. Available at: <https://www.mdpi.com/2311-5521/3/3/66>.
- [5] **Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К.** Математическая модель процесса захоронения углекислого газа в гидратонасыщенном пласте. *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН*. 2016; 11(2):181–187. DOI:10.21662/uim2016.2.026. Адрес доступа: <http://proc.uimech.org/uim2016.2.026#gsc.tab=0>.
- [6] **El-Amin M.F., Sun Sh., Salama A.** Modeling and simulation of nanoparticle transport in multiphase flows in porous media: CO₂ sequestration. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics and Simulation of Giant Oil and Gas Reservoirs*. Istanbul, Turkey. September 3–5, 2012. Paper Number: SPE-163089-MS. DOI:10.2118/163089-MS. Available at: <https://onepetro.org/spelsrs/proceedings-abstract/12LSRS/All-12LSRS/SPE-163089-MS/159340>.
- [7] **Афанасьев А.А., Мельник О.Э., Цветкова Ю.Д.** Моделирование фильтрации при подземном захоронении углекислого газа с применением высокопроизводительных вычислительных систем. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2013; 6(4):420–429. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.4.46. Адрес доступа: <http://journal.permsc.ru/index.php/ccm/article/view/CCMv6n4a46>.
- [8] **Вирц Р.А., Папин А.А.** Проблемы математического моделирования хранения углекислого газа в геологических формациях: учебное пособие. Барнаул: Алтайский государственный университет; 2021: 70.

- [9] **Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y.** Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock. *Geodinamica Acta*. 1998; 11(2–3):55–84. DOI:10.1016/S0985-3111(98)80006-5. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0985311198800065>.
- [10] **Fowler A.** *Mathematical geoscience*. London: Springer-Verlag; 2011: 883.
- [11] **Bear J.** *Dynamics of fluids in porous media*. N.Y.: American Elsevier Publishing Company; 1972: 764.
- [12] **Morency S., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P.** A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability. *Journal of Geophysical Research*. 2007; 112(B10). DOI:10.1029/2006JB004701. Available at: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1029/2006JB004701>.
- [13] **Нигматулин Р.И.** *Динамика многофазных сред*. М.: Наука; 1987; (1):463.
- [14] **Khasanov M.K., Rafikova G.R., Musakaev N.G.** Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate. *Energies*. 2020; 13(2):440. DOI:10.3390/en13020440. Available at: <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/2/440>.
- [15] **Virts R.A., Papin A.A., Tokareva M.A.** Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020; 1666(1). DOI:10.1088/1742-6596/1666/1/012041. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1666/1/012041>.
- [16] **Papin A.A., Tokareva M.A., Virts R.A.** Filtration of liquid in a non-isothermal viscous porous medium. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2020; 13(6):763–773. DOI:10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773. Available at: <http://journal.sfu-kras.ru/en/article/137564>.
- [17] **Вирец Р.А., Папин А.А., Вайгант В.А.** Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде. *Известия Алтайского государственного университета*. 2018; 4(102):62–67. DOI:10.14258/izvasu(2018)4-11. Адрес доступа: <http://izvestiya.asu.ru/article/view/%282020%291-11>.
- [18] **Сибин А.Н., Сибин Н.Н.** Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов. *Известия Алтайского государственного университета*. 2017; 1(93):123–126. DOI:10.14258/izvasu(2017)1-24. Адрес доступа: <http://izvestiya.asu.ru/index.php/iz/article/view/2249>.
- [19] **Tokareva M.A.** Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration poroelastic media. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016; 722(1):012037. DOI:10.1088/1742-6596/722/1/012037. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/722/1/012037>.
- [20] **Tokareva M.A., Papin A.A.** Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2019; 13(2):350–362. DOI:10.1134/S1990478919020169. Available at: https://www.researchgate.net/publication/358226792_Global_Solvability_of_a_System_of_Equations_of_One-Dimensional_Motion_of_a_Viscous_Fluid_in_a_Deformable_Viscous_Porous_Medium.
- [21] **Papin A.A., Tokareva M.A.** On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2017; 10(3):385–395. DOI:10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395. Available at: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/33623>.

- [22] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука; 1977: 656.
- [23] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука; 1986: 512.
- [24] Першин И.В., Титов В.А., Шишкин Г.И. Экспериментальное определение порядка равномерной сходимости специальных разностных схем. Математическое моделирование. 1995; 7(6):85–94.
- [25] Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов. Новосибирск: Новосибирский государственный университет; 2007: 160.
- [26] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод: учебное пособие. Гостехиздат, 1952: 664.
- [27] Петрушин Е.О., Арутюнян А.С. Техническая характеристика скважин и оборудования для проведения гидродинамических исследований. Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2015; (2):73–83.

Вычислительные технологии, 2022, том 27, № 6, с. 4–18. © ФИЦ ИВТ, 2022
Computational Technologies, 2022, vol. 27, no. 6, pp. 4–18. © FRC ICT, 2022

ISSN 1560-7534
eISSN 2313-691X

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.002

Modelling the storage of carbon dioxide in viscoelastic porous medium

VIRTS RUDOLF A.*, PAPIN ALEKSANDER A.

Altai State University, 656049, Barnaul, Russia

*Corresponding author: Virts Rudolf A., e-mail: virtsrudolf@gmail.com

Received May 03, 2022, accepted June 16, 2022.

Abstract

Purpose. This paper presents a model that describes gas filtration in a poroelastic medium. The initial-boundary problem describing carbon dioxide injection into a geological environment is formulated. The purpose of the research is numerical solution of the initial-boundary value problem and the analysis of results of the presented numerical simulation.

Methodology. The assumption that the solid phase velocity is small allows reducing the original system of constitutive two-dimensional equations to two equations for the effective pressure and porosity. For numerical implementation, the scheme of alternating directions and the Runge–Kutta method of the fourth order of accuracy are used. A parabolic equation for the effective pressure was solved using the stabilizing correction scheme and the explicit scheme for the heat equation. Grid convergence is tested by a series of computational experiments on sequences of refined grids.

Findings. Several options for gas injection are considered. Optimal parameters for storing carbon dioxide in geological formations in the long term have been found.

Originality/value. Taking into account the poroelastic properties and the assumption of the deformability of the solid phase of the medium allows making new predictions of the distribution of carbon dioxide in geological media. The research results can be useful for improving existing carbon dioxide storage models and for developing new ones.

Keywords: porosity, filtration, poroelasticity, carbon dioxide, injection, numerical solution.

Citation: Virts R.A., Papin A.A. Modelling of carbon dioxide storage in a viscoelastic porous medium. Computational Technologies. 2022; 27(6):4–18. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.002. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was carried out in accordance with the State Assignment of the Russian Ministry of Science and Higher Education entitled “Modern methods of hydrodynamics for environmental management, industrial systems and polar mechanics” (Govt. contract code: FZMW-2020-0008).

References

1. **Wen B., Shi Z., Jessen K., Hesse M.A., Tsotsis T.T.** Convective carbon dioxide dissolution in a closed porous medium at high-pressure real-gas conditions. *Advances in Water Resources*. 2021; 2021(154):103950. DOI:10.1016/j.advwatres.2021.103950. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0309170821001056>.
2. **Singh R.P., Shekhawat K.S., Das M.K., Muralidhar K.** Geological sequestration of CO₂ in a water-bearing reservoir in hydrate-forming conditions. *Oil & Gas Science and Technology — Revue d'IFP Energies Nouvelles*. 2020; 75(5):51. DOI:10.2516/ogst/2020038. Available at: https://www.researchgate.net/publication/343233780_Geological_sequestration_of_CO2_in_a_water-bearing_reservoir_in_hydrate-forming_conditions.
3. **Wen B., Akhbari D., Zhang L., Hesse M.A.** Convective carbon dioxide dissolution in a closed porous medium at low pressure. *Journal of Fluid Mechanics*. 2018; (854):56–87. DOI:10.1017/jfm.2018.622. Available at: https://www.researchgate.net/publication/327352691_Convective_carbon_dioxide_dissolution_in_a_closed_porous_medium_at_low_pressure.
4. **Kim K., Vilarrasa V., Makhnenko R.Y.** CO₂ injection effect on geomechanical and flow properties of calcite-rich reservoirs. *Fluids*. 2018; 3(3):66. DOI:10.3390/fluids3030066. Available at: <https://www.mdpi.com/2311-5521/3/3/66>.
5. **Musakaev N.G., Khasanov M.K.** The mathematical model of the carbon dioxide burial in the reservoir saturated with hydrate. *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*. 2016; 11(2):181–187. DOI:10.21662/uim2016.2.026. Available at: <http://proc.uimech.org/uim2016.2.026#gsc.tab=0>. (In Russ.)
6. **El-Amin M.F., Sun Sh., Salama A.** Modeling and simulation of nanoparticle transport in multiphase flows in porous media: CO₂ sequestration. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics and Simulation of Giant Oil and Gas Reservoirs*. Istanbul, Turkey. September 3–5, 2012. Paper Number: SPE-163089-MS. DOI:10.2118/163089-MS. Available at: <https://onepetro.org/spelsrs/proceedings-abstract/12LSRS/A11-12LSRS/SPE-163089-MS/159340>.
7. **Afanasyev A.A., Melnik O.E., Tsvetkova Yu.D.** Modeling of flows in porous media related to underground carbon dioxide storage using high performance computing systems. *Computational Continuum Mechanics*. 2013; 6(4):420–429. Available at: <http://journal.permsc.ru/index.php/ccm/article/view/CCMv6n4a4>. (In Russ.)
8. **Virts R.A., Papin A.A.** Problemy matematicheskogo modelirovaniya khraneniya uglekislogo gaza v geologicheskikh formatsiyakh: uchebnoe posobie [Problems of mathematical modelling of carbon dioxide storage in geological formations]. Barnaul: Altayskiy Gosudarstvennyy Universitet; 2021: 70. (In Russ.)
9. **Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y.** Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock. *Geodinamica Acta*. 1998; 11(2–3):55–84. DOI:10.1016/S0985-3111(98)80006-5. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0985311198800065>.
10. **Fowler A.** *Mathematical geoscience*. London: Springer-Verlag; 2011: 883.
11. **Bear J.** *Dynamics of fluids in porous media*. N.Y.: American Elsevier Publishing Company; 1972: 764.
12. **Morency S., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P.** A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability. *Journal of Geophysical Research*. 2007; 112(B10). DOI:10.1029/2006JB004701. Available at: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1029/2006JB004701>.
13. **Nigmatulin R.I.** *Dynamics of multiphase media*. CRC Press; 1987; (1):532.
14. **Khasanov M.K., Rafikova G.R., Musakaev N.G.** Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate. *Energies*. 2020; 13(2):440. DOI:10.3390/en13020440. Available at: <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/2/440>.
15. **Virts R.A., Papin A.A., Tokareva M.A.** Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020; 1666(1). DOI:10.1088/1742-6596/1666/1/012041. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1666/1/012041>.

16. **Papin A.A., Tokareva M.A., Virts R.A.** Filtration of liquid in a non-isothermal viscous porous medium. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* 2020; 13(6):763–773. DOI:10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773. Available at: <http://journal.sfu-kras.ru/en/article/137564>.
17. **Virts R.A., Papin A.A., Weigant V.A.** Numerical solution of the one-dimensional problem of filtration of an incompressible fluid in a viscous porous medium. *Izvestiya of Altai State University.* 2018; 4(102):62–67. DOI:10.14258/izvasu(2018)4-11. Available at: <http://izvestiya.asu.ru/article/view/%282018%294-11>. (In Russ.)
18. **Sibin A.N., Sibin N.N.** Numerical solution of one-dimensional problem of filtration with suffosion processes. *Izvestiya of Altai State University.* 2017; 1(93):123–126. DOI:10.14258/izvasu(2017)1-24. Available at: <http://izvestiya.asu.ru/index.php/iz/article/view/2249>. (In Russ.)
19. **Tokareva M.A.** Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration poroelastic media. *Journal of Physics: Conference Series.* 2016; 722(1):012037. DOI:10.1088/1742-6596/722/1/012037. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/722/1/012037>.
20. **Tokareva M.A., Papin A.A.** Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 2019; 13(2):350–362. DOI:10.1134/S1990478919020169. Available at: https://www.researchgate.net/publication/358226792_Global_Solvability_of_a_System_of_Equations_of_One-Dimensional_Motion_of_a_Viscous_Fluid_in_a_Deformable_Viscous_Porous_Medium.
21. **Papin A.A., Tokareva M.A.** On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* 2017; 10(3):385–395. DOI:10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395. Available at: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/33623>.
22. **Samarskii A.A.** *The theory of difference schemes.* Marcel Dekker Inc; 2001: 786.
23. **Kalitkin N.N.** *Chislennye metody [Numerical methods].* Moscow: Nauka; 1986: 512. (In Russ.)
24. **Pershin I.V., Titov V.A., Shishkin G.I.** Experimental evaluation of the order of uniform convergence for special difference schemes. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 1995; 7(6):85–94. (In Russ.)
25. **Khakimzyanov G.S., Cherny S.G.** *Numerical methods for solving problems for equations of parabolic and elliptic types.* Novosibirsk: Novosibirskiy Gosudarstvennyy Universitet; 2007: 160. (In Russ.)
26. **Polubarinova-Kochina P.Ya.** *Theory of ground water movement.* Princeton University Press; 1962: 613.
27. **Petrushin E.O., Arutyunyan A.S.** *Technical characteristics of wells and equipment for hydrodynamic studies.* The Science. Technics. Technologies (Polytechnic Bulletin). 2015; (2):73–83. (In Russ.)